

粉煤灰混凝土配合比设计中的多元统计分析

程 瑶, 胡红梅

(厦门大学 建筑与土木工程学院, 福建 厦门 361005)

摘 要: 在混凝土中掺入粉煤灰等矿物掺合料能够有效地改善混凝土的综合性能, 而这一技术的关键是矿物掺合料的比例设计。由于这是一个复杂的物理化学过程, 至今还没有通用的数学模型来指导配比设计。文章根据实验中的样本数据, 利用多元统计的方法得到线性回归数学模型。计算结果表明, 该模型能够很好地与实际数据相吻合, 对实际进行混凝土配合比设计具有一定的参考价值。

关键词: 混凝土; 粉煤灰; 统计分析; 配合比

中图分类号: TU528.2; TP391.72

文献标识码: A

文章编号: 1673-5781(2006)02-0089-03

粉煤灰在混凝土中的应用已经有很长的历史, 它可以改善混凝土的综合性能, 节约水泥, 利于环保。因此具有十分广泛的应用前景^[1]。从已有的国内外文献来看, 粉煤灰和其它外加材料的配合比计算基本上是经验公式。这是因为混凝土的形成过程是一个十分复杂的物理化学过程, 难以根据物理化学机理建立准确的数学模型, 所以无法得到通用的、在各种场合都能够适用的计算公式。因此无法保证混凝土的最佳配合比, 达到最佳的性能价格比^[2~4]。再就是粉煤灰材料的成分具有很大的不确定性, 各地生产的粉煤灰成分差异较大, 在一定程度上给混凝土的配制增加了许多难度。如何从大量的实验数据中找到具有指导性的数学模型, 对配制高性能的混凝土具有十分重要的意义。

1 统计分析的意义

在许多文献中可以看到大量的实验数据, 对这些实验数据的处理往往就是简单的表格和图表, 以及根据这些表格和图表得到的定性分析。已有的统计分析大多局限于单变量模型。在混凝土配制的物理化学机理不是十分清楚的情况下, 统计分析是一种十分有效的辅助手段。所谓统计分析就是通过对实验数据的处理, 得到统计数学模型, 从而可以达到定量分析的目的。对混凝土的各种性能指标可以利用数学模型进行一些预测分析。本文拟采用多元线性回归模型, 即建立混凝土性能指标和粉煤灰以及其它矿物

掺合料的线性回归关系。

多元线性回归模型, 就是对于一组实验数据, 确定独立变量和因变量, 寻找一个最佳的线性组合关系, 从而达到定量分析实验数据的目的。若独立变量为 X , 因变量为 Y , 则线性模型为

$$Y = X\phi + E \quad (1)$$

其中, ϕ 为待确定的回归系数; E 为考虑到模型不确定性后引入的误差。

根据最小二乘法原理^[5], ϕ 的估计值为

$$\phi = (XX^T)^{-1}X^TY \quad (2)$$

其中, $(XX^T)^{-1}$ 为矩阵的求逆运算。最小二乘估计的统计特性是无偏和具有最小方差, 因此在实际中得到广泛应用。

2 实验数据和数学模型的建立

2.1 实验原材料

(1) 粉煤灰: 采用厦门嵩能粉煤灰开发有限公司生产的 I 级、II 级粉煤灰, 过 0.045 mm 筛, 筛余量分别占 9.60%、27.68%, 比表面积分别为 504 m²/kg、466.5 m²/kg, 烧失率分别为 3.7%、4.3%, 密度分别为 2.52 g/cm³、2.28 g/cm³。

(2) 水泥: 采用厦门市凤山水泥有限公司国道牌 P.O 42.5 旋窑普通硅酸盐水泥。

(3) 废弃石粉: 为花岗岩石粉, 比表面积 553 m²/kg, 烧失率 1.2%, 密度为 2.71 g/cm³, 过 0.045 mm 筛, 筛余量 9.30%。

收稿日期: 2005-12-12

作者简介: 程 瑶(1963-), 女, 安徽合肥人, 厦门大学高级工程师。

(4) 细骨料: 为河砂, 密度为 2.63 g/m^3 , 堆积密度为 1434 kg/m^3 , 细度模数 $M_x = 2.86$, 属于中砂。

(5) 粗骨料: 为直径 $5 \sim 25 \text{ mm}$ 的碎石, 设计的密度为 2.68 g/m^3 , 堆积密度为 1440 kg/m^3 , 级配合格。

(6) 减水剂采用厦门产“点石牌”FDN 萘系高效减水剂, 减水率为 $8\% \sim 25\%$ 。

2.2 混凝土配合比设计方案及实验数据

实验采用的混凝土设计强度等级为 C50, 要求坍落度 $T = (150 \pm 30) \text{ mm}$, 应用于海洋环境。经初步

计算得到基准配合比, 如表 1 所列。在基准配合比的基础上, 等量内掺不同比例的粉煤灰与废弃石粉, 设计了三组配合比方案, 检测各组粉煤灰混凝土的和易性与不同龄期的抗压强度, 得出了相应的实验数据^[6,7], 详见表 2、表 3、表 4 所列。

表 1 混凝土基准配合比

原材料	胶凝材料 (含矿物掺合料)	河砂	石子	水
用量/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	520	672	1 008	185

表 2 I 级粉煤灰的配合比方案及其实验数据

编号	胶凝材料			减水剂 <i>I</i> (%)	坍落度 / mm	抗压强度	
	水泥	I 级粉煤灰				<i>f</i> ₇ / MPa	<i>f</i> ₂₈ / MPa
	<i>I</i> (kg • m ⁻³)	<i>I</i> (kg • m ⁻³)	<i>I</i> (%)				
1	442	78	15	1.0	180	40.9	70.8
2	416	104	20	0.8	170	39.5	67.6
3	390	130	25	0.7	175	36.2	60.2
4	364	156	30	0.6	180	35.2	55.4

表 3 III 级粉煤灰的配合比方案及其实验数据

编号	胶凝材料			减水剂 <i>I</i> (%)	坍落度 / mm	抗压强度	
	水泥	I 级粉煤灰				<i>f</i> ₇ / MPa	<i>f</i> ₂₈ / MPa
	<i>I</i> (kg • m ⁻³)	<i>I</i> (kg • m ⁻³)	<i>I</i> (%)				
1	442	78	15	1.0	175	39.9	60.7
2	416	104	20	0.8	170	38.7	59.7
3	390	130	25	0.7	160	34.3	56.1
4	364	156	30	0.7	175	31.9	54.7

表 4 I 级粉煤灰与废弃石粉复掺的配合比方案及其实验数据

编号	胶凝材料			石粉/(%)	减水剂/(%)	坍落度/mm	抗压强度	
	水 泥	Ⅰ 级粉煤灰					f_7/MPa	f_{28}/MPa
	$I/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$I/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$I/(\%)$					
1	416	52	10	10	0.9	180	36.6	57
2	390	78	15	10	0.7	190	36.3	59.4
3	390	52	10	15	0.9	180	36.4	58
4	364	78	15	15	0.8	180	35.1	56.7

2.3 多元线性回归数学模型的建立

定义混凝土的性能变量为坍落度 Y_T , 7 d 抗压强度 Y_7 和 28 d 抗压强度 Y_{28} 。

预测变量为 I 级粉煤灰 X_1 , II 级粉煤灰 X_2 , 石粉 X_3 和减水剂 X_4 。对于配合比一, 建立如下的线性回归关系, 即

$$\begin{aligned} Y_T^1 &= \alpha_0^1 + \alpha_1^1 X_1^1 + \alpha_4^1 X_4^1 + e_T^1 \\ Y_7^1 &= \beta_0^1 + \beta_1^1 X_1^1 + \beta_4^1 X_4^1 + e_7^1 \\ Y_{28}^1 &= \gamma_0^1 + \gamma_1^1 X_1^1 + \gamma_4^1 X_4^1 + e_{28}^1 \end{aligned} \tag{3}$$

式中 $\alpha_i^j, \beta_i^j, \gamma_i^j$ ——方程的回归系数
 e_i^j ——服从正态分布的随机误差

根据表 2 中的坍落度、抗压强度等实验数据, 则有

$$\begin{aligned} Y_T^1 &= \begin{bmatrix} 180 \\ 170 \\ 175 \\ 180 \end{bmatrix}, & Y_7^1 &= \begin{bmatrix} 40.9 \\ 39.5 \\ 36.2 \\ 35.2 \end{bmatrix}, \\ Y_{28}^1 &= \begin{bmatrix} 70.8 \\ 67.6 \\ 60.2 \\ 55.4 \end{bmatrix}, & X_1^1 &= \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix}, & X_4^1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

根据最小二乘原理, 各回归系数的最小二乘估计为

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -30.4, & \alpha_1 &= 4, & \alpha_4 &= 150 \\ \beta_0 &= 52.1, & \beta_1 &= -0.5, & \beta_4 &= -3.7 \\ \gamma_0 &= 121.2, & \gamma_1 &= -1.7, & \gamma_4 &= -24.7\end{aligned}\quad (5)$$

类似地,对于配合比二,建立如下的线性回归方程,即

$$\begin{aligned}Y_7^2 &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 X_1^2 + \alpha_4^2 X_4^2 + e_7^2 \\ Y_7^2 &= \beta_0^2 + \beta_1^2 X_1^2 + \beta_4^2 X_4^2 + e_7^2 \\ Y_{28}^2 &= \gamma_0^2 + \gamma_1^2 X_1^2 + \gamma_4^2 X_4^2 + e_{28}^2\end{aligned}\quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned}Y_7^2 &= \begin{bmatrix} 175 \\ 170 \\ 160 \\ 175 \end{bmatrix}, & Y_7^2 &= \begin{bmatrix} 39.9 \\ 38.7 \\ 34.3 \\ 31.9 \end{bmatrix}, \\ Y_{28}^2 &= \begin{bmatrix} 70.8 \\ 67.6 \\ 60.2 \\ 55.4 \end{bmatrix}, & X_1^2 &= \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix}, & X_4^2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (7)$$

根据最小二乘原理可得各回归系数的估计为

$$\begin{aligned}\alpha_0^2 &= 49.5, & \alpha_1^2 &= 1.8, & \alpha_4^2 &= 100 \\ \beta_0^2 &= 56.5, & \beta_1^2 &= -0.69, & \beta_4^2 &= -6 \\ \gamma_0^2 &= 97.6, & \gamma_1^2 &= -1.23, & \gamma_4^2 &= -8\end{aligned}\quad (8)$$

对于配合比三,建立如下的线性回归方程,即

$$\begin{aligned}Y_7^3 &= \alpha_0^3 + \alpha_1^3 X_1^3 + \alpha_4^3 X_4^3 + e_7^3 \\ Y_7^3 &= \beta_0^3 + \beta_1^3 X_1^3 + \beta_4^3 X_4^3 + e_7^3 \\ Y_{28}^3 &= \gamma_0^3 + \gamma_1^3 X_1^3 + \gamma_4^3 X_4^3 + e_{28}^3\end{aligned}\quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned}Y_7^3 &= \begin{bmatrix} 180 \\ 190 \\ 180 \\ 180 \end{bmatrix}, & Y_7^3 &= \begin{bmatrix} 36.6 \\ 36.3 \\ 36.4 \\ 35.1 \end{bmatrix}, & Y_{28}^3 &= \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} \\ X_1^3 &= \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}, & X_4^3 &= \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}, & X_4^3 &= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.9 \\ 0.8 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (10)$$

根据最小二乘原理可得回归系数为

$$\begin{aligned}\alpha_0^3 &= 290, & \alpha_1^3 &= -2, & \alpha_4^3 &= 0, & \alpha_4^3 &= -1000 \\ \beta_0^3 &= 50.6, & \beta_1^3 &= -0.46, & \beta_4^3 &= -0.04, & \beta_4^3 &= -10 \\ \gamma_0^3 &= 98.3, & \gamma_1^3 &= -1, & \gamma_4^3 &= 0.2, & \gamma_4^3 &= -37\end{aligned}\quad (11)$$

3 模型验证

将参数估计值带入各自的线性回归模型中,并利用各自的独立变量矩阵,得到计算出的因变量值,即

$$Y = X\phi \quad (12)$$

其中, Y 是 Y 的估计值。计算结果详见表 5 所列。

表 5 线性回归模型计算值与实测值对比

指标	坍落度		抗压强度		抗压强度	
	/ mm		f_7 / MPa		f_{28} / MPa	
	实测值	计算值	实测值	计算值	实测值	计算值
配合比一	180	180	40.9	40.9	70.8	71.0
	170	170	39.5	39.1	67.6	67.4
	175	175	36.2	37.0	60.2	61.4
	180	180	35.2	34.9	55.4	55.4
	175	176	39.9	40.2	60.7	71.2
配合比二	170	165	38.7	37.9	59.7	66.6
	160	164	34.3	35.1	56.1	61.3
	175	173	31.9	31.6	54.7	55.1
	180	180	36.6	36.6	57	57
配合比三	190	190	36.3	36.3	59.4	59.4
	180	180	36.4	36.4	58	58
	180	180	35.1	35.1	56.7	56.7

4 结束语

由计算结果可见,多元线性回归模型能够反映实际的测量值。可以肯定的是,当实验的样本量再增加一些,统计特性就能更加充分地反映出来,从而可以作为粉煤灰混凝土设计的辅助手段,达到提高效率,节约成本和时间的目的。

由于混凝土形成过程的机理非常复杂,线性关系有时可能不能满足需要,可以考虑非线性回归技术的应用,神经网络技术的应用等。另外本文采用的是完全“黑箱”的方法建立相关的数学模型,即没有用到任何物理化学定律,如能结合一些机理建立参数化数学模型,然后再利用数理统计的方法确定模型中的参数,则所得到的模型会更有实用价值。

〔参考文献〕

- [1] 王 玮. 粉煤灰资源化综合利用技术[J]. 煤炭加工与综合利用, 1998, (1): 41- 44.
- [2] 李崇智, 冯乃谦, 董爱群. 大掺量粉煤灰高性能混凝土的强度推测及正交试验线性分析[J]. 混凝土, 2001, (1): 25- 28.
- [3] 刘爱新. 粉煤灰混凝土的性能及其应用[J]. 混凝土, 2001, (12): 6- 8.
- [4] 刘宝举, 杨元霞. 大掺量粉煤灰高强混凝土研究[J]. 混凝土, 2004, (10): 29- 34.
- [5] Radhakrishna C R. Helge Toutenburg, Linear Models[M]. Springer Verlag, 1995.
- [6] 万朝均. 高强超高性能混凝土配合比设计检验探讨[J]. 混凝土, 2002, (3): 41- 43.
- [7] 唐 明, 邱 晴, 王 博. 现代混凝土外加剂及掺和料[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 1999.